

A novel definition of envelope and its estimation via tangentially constrained spline

接スプラインによる包絡の新たな定義とその推定

5117E010-5 草野 翼 指導教員 及川 靖広 教授

KUSANO Tsubasa Prof. OIKAWA Yasuhiro

概要：信号の包絡は信号を覆う滑らかな曲線であり、振幅復調や経験的モード分解 (EMD) を含む様々な応用がある重要な概念である。しかしながら、EMD に用いられる 3 次 C^2 級スプライン補間による従来の包絡推定手法では、包絡の基本要件に反するアンダーシュートが生じ、応用上悪影響を及ぼす。本研究では、包絡の信号を覆う滑らかな曲線であるという基礎的な要件に基づき、接スプラインによる包絡の新たな定義とその推定法を提案する。接スプラインは一次導関数を制約された 4 次 C^2 級スプライン関数であり、効果的にアンダーシュートを抑制できる。また、最適に滑らかな包絡を得るために接スプラインの接点最適化手法を同時に提案する。

キーワード：スプライン関数、制約付き最適化、adjoint-state method、経験的モード分解

Keywords: Spline functions, constrained optimization, adjoint-state method, empirical mode decomposition

1. まえがき

信号の包絡は、信号を覆う滑らかな曲線であり、振幅変調 (AM) 信号の復調や経験的モード分解 (EMD) など信号処理に広く応用されている [1]。しかしながら、信号の包絡の特性の曖昧さから、信号処理への応用上望ましい包絡の定義が明確でなく、状況によって異なる定義が用いられている。

信号の包絡の定義として最も広く知られているのは解析信号を用いた解析包絡である。しかし、解析包絡は狭帯域信号においてのみ意味のある包絡が与えられる。また、局所的なエネルギーによる定義もあるが、エネルギーの算出方法によって得られる包絡が異なる。

一方で EMD においては、極値を通る滑らかな関数として包絡を定義している [2]。この定義に基づく包絡は狭帯域信号でなくとも滑らかであり、より一般的な信号においても有効で、高精度な包絡推定手法として広く用いられている [1]。しかしながら、この定義に基づく手法はしばしば包絡が元の信号を下回るアンダーシュートが起る。これは信号を覆うという包絡の基本的な性質に反し、復調や EMD などで悪影響を及ぼすことが知られている。

そこで本研究では、信号処理の応用上望ましい信号の包絡を定義することを目的とし、「接スプライン」と称した「一次導関数を制約された 4 次 C^2 級スプライン関数」を用いた包絡の定義を提案し、その推定手法を与える [3]。

2. 提案手法

EMD などのより一般的な信号を扱う応用においては、極値を通る滑らかな関数という包絡の定義に基づき、信号の極値を 3 次 C^2 級スプライン関数で補間する包絡推定手法が広く用いられる [2]。しかし、単純に極値を補間した場合には図-1(a) のようなアンダーシュートが生じてしまう。そこで本研究では、包絡を適当な点で信号と

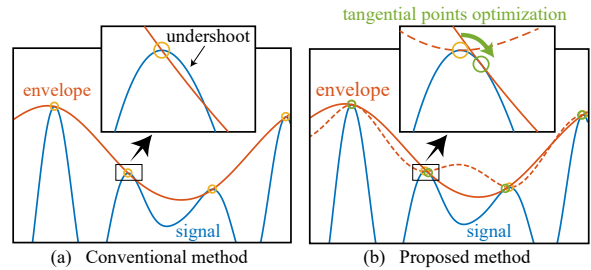


図-1 (a) 従来の 3 次 C^2 級スプライン補間 [2] と (b) 提案手法により推定された包絡の模式図。

接し、滑らかな曲線であると定義する。このような包絡を推定するために、補間点において包絡が信号と接するという制約の上で、補間点の最適化を行う。

提案手法の概略を図-1(b) に示す。補間関数として接スプラインを導入することで、補間点において接するような補間を行う。スプライン関数は補間点での値や微分値によって特徴づけられるので、効率的に制約を加えることができる。さらに、接点の最適化により点はその曲率に基づき最適化されるので、図-1(b) の実線のように曲率が小さくなる。これらにより提案法は補間点で厳密に接し、平滑な包絡を推定することができる。

2.1 スプライン関数

スプライン関数とは、区間多項式によって定義される連続関数であり、その柔軟性と最適性により信号処理において広く用いられている。グリッド $\mathbf{x}=[x_0, x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$) により n 個の小区間に分割された区間 $[x_0, x_n]$ 上で定義されるスプライン関数を考える。 $\rho, d \in \mathbb{Z}$ を $0 \leq \rho < d$ とし、 d 次 ρ 階連続微分可能なスプライン関数の集合 $S_d^\rho(\mathbf{x})$ を

$$\{f \in C^\rho([x_0, x_n]) \mid f = f_k \in \mathbb{P}_d \text{ on } [x_k, x_{k+1}] \forall k\} \quad (1)$$

と定義する。ただし、 $C^\rho(\Omega)$ は Ω 上の ρ 階連続微分可能な関数の集合、 \mathbb{P}_d は最大次数 d の多項式の集合である。

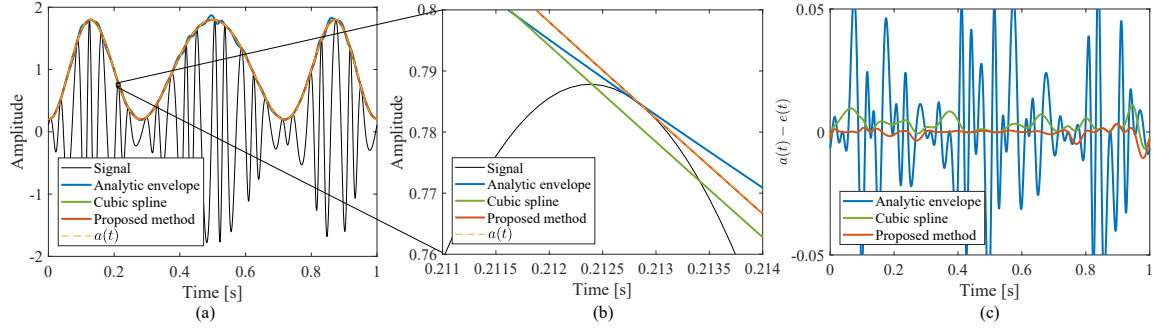


図-2 包絡推定結果. (a) は信号 $u(t)$ と各手法によって得られた包絡を示し, (b) はその一部を拡大したものである. (c) は $a(t)$ と各手法により得られた包絡 $e(t)$ との差を示す.

2.2 包絡推定のための接スプラインの導入

信号と接するような包絡を推定するために, 本研究では接スプラインを提案する. 接スプライン s_{TC} は, 関数の曲率をコストとする補間点における一次導関数を制約された 4 次 C^2 級スプラインによる最適化問題

$$\begin{aligned} \min_{s_{TC} \in S_4^2(\tau)} & \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_n} |s_{TC}''(t)|^2 dt \\ \text{s.t.} & s_{TC}(\tau_k) = u(\tau_k), s_{TC}'(\tau_k) = u'(\tau_k) \quad \forall k \end{aligned} \quad (2)$$

の解として定義する. ただし, $\tau = [\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ ($\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n$) は一次導関数を制約された補間点 (接点) に対応する時刻である. 1 次導関数の制約を加えるために, 多項式の次数を従来の 3 次から 4 次としている. 従来の 3 次 C^2 級スプライン補間のような補間点を通るという制約に加えて, 補間点における一次導関数の信号との一致を制約とすることで, 接スプラインは時刻 τ で信号と接する.

式 (2) を解くために, 離散的な形式に再定式化する. 最適化変数を $\mathbf{s} = [z_0, \dots, z_n, p_0, \dots, p_n, P_0, \dots, P_n]^T$ とする. ただし, $z_k = s_{TC}(\tau_k)$, $p_k = s_{TC}'(\tau_k)$, $P_k = s_{TC}''(\tau_k)$ である. スプライン関数は多項式の係数によって特徴づけられるので, 式 (2) は

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{3n+3}} \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{E} \mathbf{s} = \mathbf{b} \quad (3)$$

のような離散的な問題に再定式化できる. ただし, $\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s} = \int_{\tau_0}^{\tau_n} |s_{TC}''(t)|^2 dt$, $\mathbf{E} \mathbf{s} = \mathbf{b}$ は $s_{TC}(\tau_k) = u(\tau_k)$, $s_{TC}'(\tau_k) = u'(\tau_k)$ および 2 階連続微分可能に対応する制約を表す. この制約付き最適化問題の解は Karush-Kuhn-Tucker (KKT) システム

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\xi} - \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (4)$$

を解くことにより求めることができる. ただし,

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{E} & \mathbf{O} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{3n+2}$ は KKT 乗数である.

2.3 接スプラインの接点最適化

前節において包絡が信号に接するよう, 接スプライン s_{TC} を提案した. しかし, 時刻 τ の選び方によって滑らかさが左右される. そこで, 接スプラインが最も滑らかになるよう接点を最適化する手法を提案する.

スプライン関数を τ の関数と考えると, 接点最適化問題は KKT システム (4) を制約とする

$$\min_{\tau \in \mathbb{R}^{n+1}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T \tilde{\mathbf{A}}(\tau) \boldsymbol{\xi} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{K}(\tau) \boldsymbol{\xi} - \tilde{\mathbf{b}}(\tau) = \mathbf{0} \quad (5)$$

のように定式化される. ただし, $\tilde{\mathbf{A}} = [[\mathbf{A}, \mathbf{O}]^T, [\mathbf{O}, \mathbf{O}]^T]^T$ である. 本研究では, 最適化手法として準ニュートン法の一つである BFGS 法を用いて解いた.

3. 数値実験

AM-FM 信号 $u(t) = a(t) \cos(48\pi t - \cos(20\pi t))$, $a(t) = 1 - 0.8 \cos(6\pi t + \sin(2\pi t))$, $t \in [0, 1]$ に対する包絡を Hilbert 変換による手法, 3 次 C^2 級スプライン補間による手法, 提案手法によって推定し, 比較を行った. 推定結果を図-2 に示す.

3 次 C^2 級スプライン補間による手法は Hilbert 変換による手法よりも曲率の小さい包絡が得られているが, アンダーシュートが生じている. 提案手法は曲率を抑えつつ信号に接しており, $a(t)$ に近い包絡が得られている.

4. むすび

本研究では, 接スプラインによる包絡の新たな定義とその推定手法を提案した. 今後は適切な端点条件についての検討を行う. また本研究では, 曲率をコストとして接点の最適化を行ったが, その理論的な解釈について検討する.

References

- [1] Y. Yang, "A signal theoretic approach for envelope analysis of real-valued signals," IEEE Access, vol. 5, pp. 5623–5630, 2017.
- [2] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung and H. H. Liu, "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," Proc. R. Soc. London A, vol. 454, no. 1971, pp. 903–995, 1998.
- [3] T. Kusano, K. Yatabe, Y. Oikawa, "Envelope estimation by tangentially constrained spline," IEEE Int. Conf. Acoust., Speech Signal Process. (ICASSP), pp. 4374–4378, Apr. 2018.